

共通テスト 数学Ⅰ・A 予想模試 第1回

数学Ⅰ・A / 100点満点 / 制限時間 70分 / 全23問

受験番号

氏名

得点

/100

この模試は共通テストの出題傾向を研究して独自に作成したオリジナル予想問題です。実際の過去問の転載ではありません。

第1問 数と式, 図形と計量 (30点)

a, b を実数とする。 x についての方程式

$$(3a+2b+5)x^2 + (a+b-5)x - b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

〔1〕 (1)

5点

$a=1$ とする。 b に着目すると、①の左辺は因数分解して

$$(2x-1)\{(b+\text{ア})x+b\}$$

と表せる。したがって $x = 1/\text{イ}$ は①の解の一つであることがわかる。

〔1〕 (2)(i)

4点

$b=2$ とする。①の左辺を因数分解すると

$$(\text{ウ}x + \text{エ})\{(a+\text{オ})x - \text{カ}\}$$

となる。

〔1〕 (2)(ii)

3点

$a=2\sqrt{2}$ のとき、①の解は

$$x = -\text{キ}/\text{ク}, \quad \text{ケ} - \text{コ}\sqrt{2}$$

である。

〔1〕 (2)(iii)

3点

$a=-3$ であることは、① ($b=2$ のとき) の解が $x=-1/3$ だけであるための **サ**。

〔サ〕の解答群 ① 必要条件であるが、十分条件ではない ② 十分条件であるが、必要条件ではない

③ 必要十分条件である ④ 必要条件でも十分条件でもない

△ABC において、 $AB = 7$ 、 $BC = 8$ 、 $CA = 5$ である。下の図のように、△ABC の外接円を円 O とする。

〔2〕 (1)

6点

∠ACB について余弦定理を用いると

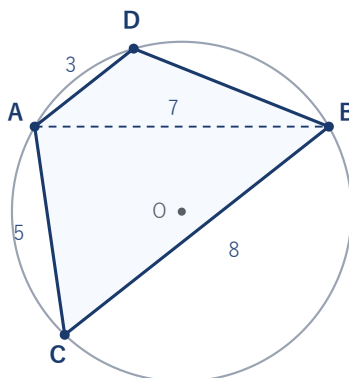
$$\cos \angle ACB = \boxed{\text{シ}} / \boxed{\text{ス}}$$

であり、 $0^\circ < \angle ACB < 180^\circ$ であるから $\angle ACB = \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}}^\circ$ である。

このとき、△ABC の外接円 O の半径 R は、正弦定理より

$$R = \boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}} / \boxed{\text{ツ}}}$$

である。



〔2〕 (2)

4点

円 O の周上に、点 D を直線 AB に関して点 C と反対側にとり、 $AD = 3$ とする。

太郎：点 D についても、△ABD の辺の長さを求めたいな。でも ∠ADB が分からないと余弦定理が使えないよ。

花子：四角形 ACBD は円 O に内接しているでしょう。だから ∠ADB は ∠ACB から求められるわ。あとは (1) とまったく同じように余弦定理を使えばいいのよ。

四角形 ACBD は円 O に内接するので

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$$

であり、 $\cos \angle ADB = -\boxed{\text{テ}} / \boxed{\text{ト}}$ である。

これを用いて △ABD に余弦定理を適用すると、 $BD = \boxed{\text{ナ}}$ である。

〔2〕 (3)

5点

四角形 ACBD の面積は $\boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}} \sqrt{\boxed{\text{ネ}} / \boxed{\text{ノ}}}$ である。

さらに、△ABD の外接円の半径を R' とするとき、 R' と (1) で求めた R の大小関係として正しいものは $\boxed{\text{ハ}}$ である。

〔ハ〕 の解答群 ① $R' < R$ ② $R' = R$ ③ $R' > R$

第2問 2次関数、データの分析 (30点)

太郎さんと花子さんは、公園でボールを投げ合って遊んでいる。二人は、投げたボールが地面に落ちるまでの動きを2次関数を使って表せないか考えることにした。

ボールを投げ出してから水平方向の距離を x m、そのときのボールの地面からの高さを y m とし、ボールの軌道は放物線を描くものとする。

太郎：ボールって、山なりのきれいな曲線をえがくよね。これ、2次関数で表せそうだ。

花子：投げ出した高さ、いちばん高くなる点の位置がわかれば、式が決まりそうね。まずは太郎くんのボールで考えてみよう。

太郎さんが投げたボールについて、次のことがわかっている。

仮定1 ボールは、地面からの高さ 1 m の点から投げ出された。

仮定2 ボールは、投げ出してから水平距離 2 m のところで最も高くなり、そのときの地面からの高さは 3 m であった。

〔1〕 (1)

6点

太郎さんが投げたボールの軌道を表す2次関数を、 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数、 $a \neq 0$) とおく。

仮定2から、この放物線の頂点の座標は (**ア**, **イ**) である。よって、定数 a を用いて

$$y = a(x - \text{ア})^2 + \text{イ}$$

と表せる。これに仮定1 (点 (0, 1) を通ること) を用いると

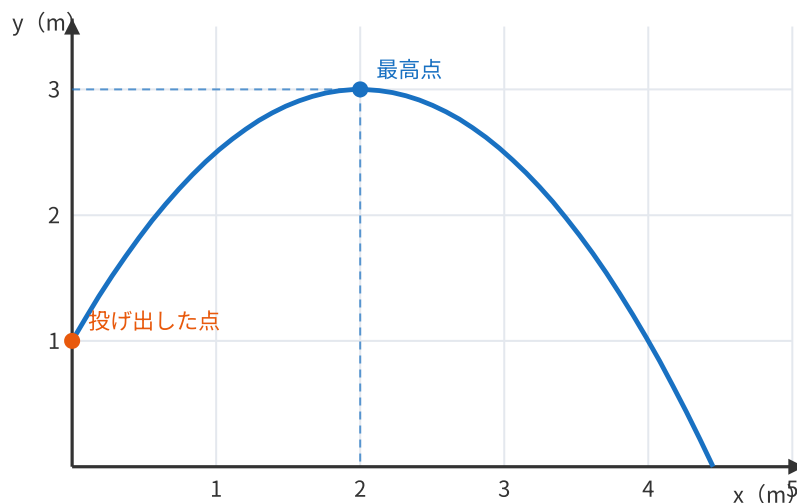
$$a = - \text{ウ} / \text{エ}$$

となる。 $a < 0$ であることから、この放物線は上に凸であることもわかる。

さらに右辺を展開して整理すると、 a の値を用いて

$$y = ax^2 + \text{オ}x + \text{カ}$$

と表せる。



〔1〕 (2)

5点

次に、花子さんが投げたボールを考える。花子さんのボールの軌道を表す放物線は、太郎さんのボールの軌道を表す放物線を平行移動したもので、2点 $(1, 2)$, $(5, 2)$ を通った。

このとき、平行移動の量は x 軸方向に **キ**、 y 軸方向に **ク** である。したがって、花子さんのボールの最高点の高さは **ケ** m であり、太郎さんのボールの最高点より高い。

花子：2つのボールの高さが、途中でちょうど同じになる瞬間はあるのかな。

太郎：2つの式を引いてみよう。 x^2 の係数が同じだから、 x^2 の項が消えるね。

2人のボールの高さが等しくなるのは、水平距離が $x =$ **コ** / **サ** のときである。

〔1〕 (3)

4点

最後に、太郎さんのボールについて考える。太郎さんのボールの地面からの高さが $\frac{5}{2}$ m 以上になるのは、水平距離 x が

$$\text{シ} \leq x \leq \text{ス}$$

の範囲にあるときである。

同じように、花子さんのボールについても高さが $\frac{5}{2}$ m 以上になる水平距離 x の範囲を求め、その範囲の幅（長さ）を太郎さんの場合と比べると、**セ**。

〔セ〕の解答群 ① 太郎さんのボールの方が長い ① 太郎さんと花子さんと等しい

② 花子さんのボールの方が長い

花子さんと太郎さんは、気象庁「過去の気象データ」をもとに、全国10都市の1月の平均気温 x (°C) と8月の平均気温 y (°C) を調べ、次の表にまとめた（数値は作問のため一部改変している）。

都市	札幌	仙台	新潟	東京	名古屋	大阪	広島	高知	福岡	鹿児島
1月 x (°C)	-3.5	1.5	2.5	5.5	4.5	6.0	5.0	6.5	7.0	8.5
8月 y (°C)	23.0	26.5	27.5	28.0	28.5	28.5	28.0	27.0	29.0	29.5

（出典：気象庁「過去の気象データ・ダウンロード」をもとに作成）

〔2〕 (1)

4点

8月の平均気温 y の分布を、図1のヒストグラムと図2の箱ひげ図に表した。

(i) y のデータについて第1四分位数と第3四分位数を求めると、四分位範囲は . °C である。

(ii) 次の(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものを、下の①～③のうちから一つ選べ。

(a) 札幌（8月の平均気温23.0°C）は「第1四分位数 $-1.5 \times$ （四分位範囲）」を下回るので、外れ値である。

(b) 8月の平均気温が28.5°Cを超える都市は、3つ以上ある。

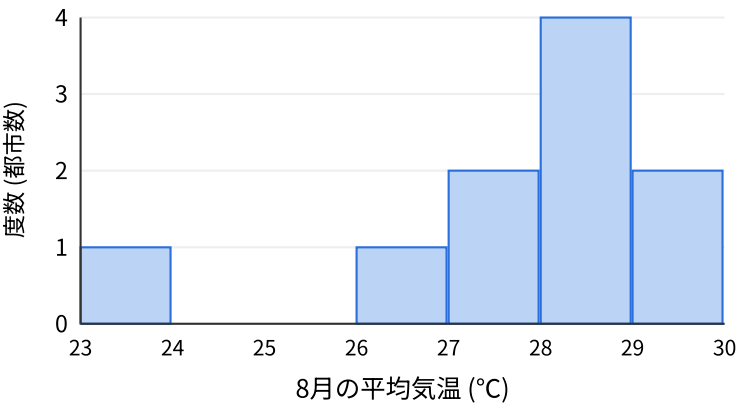


図1 8月の平均気温 y のヒストグラム

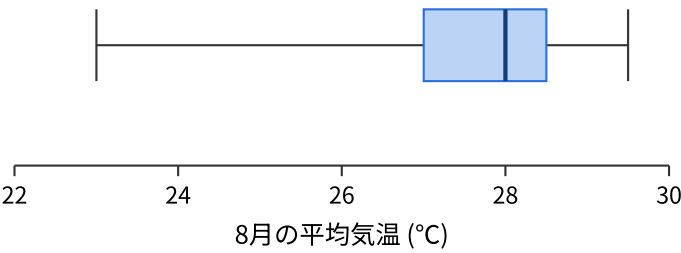


図2 8月の平均気温 y の箱ひげ図（外れ値も含めて最小値～最大値で作図）

〔チ〕の解答群 ① (a)正 (b)正 ② (a)正 (b)誤 ③ (a)誤 (b)誤

〔2〕 (2)

4点

図3は、10都市の（1月 x ，8月 y ）を表した散布図であり、表1は x ， y の平均・分散・共分散である。

(i) x と y の相関係数に最も近い値を、次の①～⑨のうちから一つ選べ。 **ツ**

(ii) 次の(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものを、下の①～③のうちから一つ選べ。 **テ**

(a) この10都市では、1月の平均気温が高い都市ほど、8月の平均気温も高い傾向がある。

(b) 相関係数が正であることから、1月の気温を上げれば8月の気温も上がるという因果関係があるといえる。

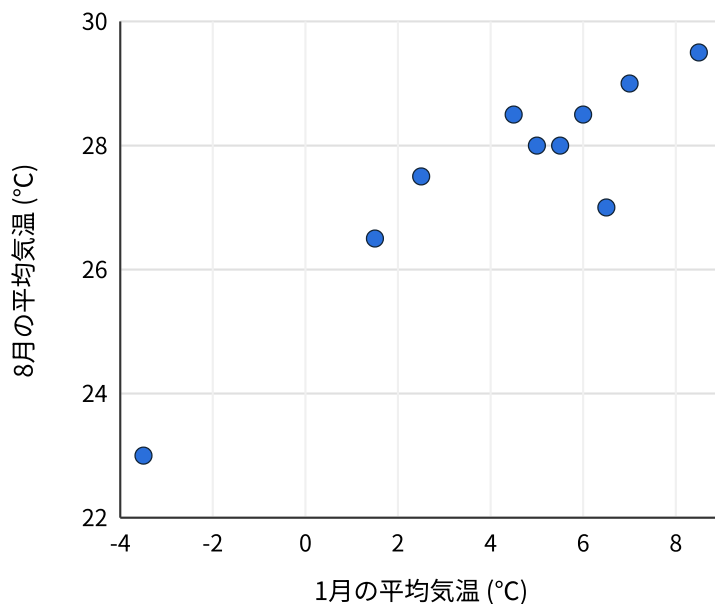


図3 (1月 x ，8月 y) の散布図

	1月 x	8月 y
平均	4.3	27.6
分散	10.7	3.0

共分散 $s_{xy} = 5.2$

表1 平均・分散・共分散（小数第1位まで）

〔ツ〕 の解答群 ① -0.90 ② -0.70 ③ -0.45 ④ -0.20 ⑤ 0.00 ⑥ 0.20 ⑦ 0.45 ⑧ 0.70 ⑨ 0.90
⑩ 1.00

〔テ〕 の解答群 ① (a)正 (b)正 ② (a)正 (b)誤 ③ (a)誤 (b)正 ④ (a)誤 (b)誤

〔2〕 (3)

3点

各都市の年較差（8月と1月の平均気温の差） $d = y - x$ を考える。

(i) d の分散 s_d^2 を s_x^2 , s_y^2 , s_{xy} を用いて表すと、 $s_d^2 =$ である。

(ii) このとき、 s_d^2 と $s_x^2 + s_y^2$ の大小関係は s_d^2 ($s_x^2 + s_y^2$) である。

〔ト〕の解答群 ① $s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}$ ② $s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}$ ③ $s_x^2 - s_y^2 + 2s_{xy}$ ④ $s_x^2 + s_y^2$ ⑤ $s_x^2 + s_y^2 - s_{xy}$

〔ナ〕の解答群 ① $<$ ② $=$ ③ $>$

〔2〕 (4)

4点

太郎さんは「この都市では8月に晴れの日が多い（晴れの日が割合が0.5より大きい）」という主張を、基準5%で仮説検定することにした。ある年の8月の20日間を無作為に選ぶと、晴れの日が15日であった。

晴れの日が割合を p とし、帰無仮説のもとで20日中の晴れの日数を X とする。表2は $P(X \geq k)$ の値である。

(i) この仮説検定の帰無仮説として正しいものを、次の①～③から選べ。

(ii) 表2より、帰無仮説のもとで晴れの日が15日以上となる確率は、0.05より 。

(iii) したがって、基準5%のもとでこの主張は 。

k	13	14	15	16	17
$P(X \geq k)$	0.132	0.058	0.021	0.006	0.001

表2 帰無仮説のもとで X が k 以上となる確率

〔ニ〕の解答群 ① p は0.5より大きい ② p は0.5である ③ p は0.5より小さい

〔ヌ〕の解答群 ① 大きい ② 小さい

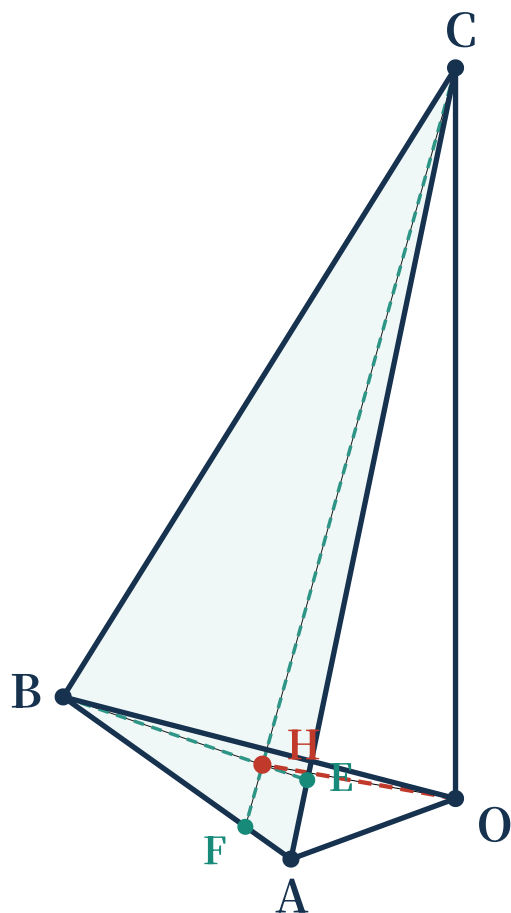
〔ネ〕の解答群 ① 正しいとはいえない ② 正しいといえる

第3問 図形の性質 (20点)

空間内の点Oを頂点として、Oで互いに垂直に交わる3つの線分OA、OB、OCをとる。すなわち

$$OA \perp OB, \quad OB \perp OC, \quad OC \perp OA$$

である。この4点O、A、B、Cを頂点とする三角錐O-ABCについて考える。点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。(下の図を参照せよ。図中のE、Fは(2)(iii)で定める。)



(1)

7点

点Hが三角形ABCのどのような点であることを、次のように調べる。

$OA \perp OB$ かつ $OA \perp OC$ であるから、直線OAは平面 **ア** に垂直である。よって直線OAは平面 **ア** 上のすべての直線と垂直であり、とくに

$$OA \perp BC \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。一方、OHは平面ABCに垂直であるから

$$OH \perp BC \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①、②より、直線BCは2直線OA、OHで定まる平面 **イ** に垂直である。したがって、平面 **イ** 上にある直線AHについて $BC \perp AH$ が成り立つ。同様にして $AB \perp CH$ も示される。

以上より、点Hは三角形ABCの各頂点から対辺に下ろした3本の垂線の交点、すなわち三角形ABCの **ウ** である。

次に、この三角錐について、下の(a)、(b)、(c)の正誤を考える。

(a) 平面OABと平面OBCは垂直である。

(b) 平面OABと平面ABCは垂直である。

(c) 直線OAは平面OBCに垂直である。

(a)、(b)、(c)の正誤の組合せとして正しいものは **エ** である。

〔ア〕の解答群 ① 面OAB ② 面OBC ③ 面OCA ④ 面ABC ⑤ 面OAH

〔イ〕の解答群 ① 面OAB ② 面OBC ③ 面OCA ④ 面ABC ⑤ 面OAH

〔ウ〕の解答群 ① 重心 ② 外心 ③ 内心 ④ 垂心

〔エ〕の解答群 ① (a)正 (b)正 (c)正 ② (a)正 (b)正 (c)誤 ③ (a)正 (b)誤 (c)誤 ④ (a)誤 (b)正 (c)正 ⑤ (a)誤 (b)正 (c)誤 ⑥ (a)誤 (b)誤 (c)正 ⑦ (a)誤 (b)誤 (c)誤

(2)(i)

4点

以下、 $OA=1$ 、 $OB=2$ 、 $OC=3$ の場合を考える。

$\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCA$ はいずれも直角三角形だから、三平方の定理より

$$AB = \sqrt{\text{オ}}, \quad BC = \sqrt{\text{カ}} \text{キ}$$

である。また、OA、OB、OCは互いに垂直だから、三角錐O-ABCの体積は

$$V = \text{ク}$$

である。

(2)(ii)

4点

3辺が $AB = \sqrt{5}$ 、 $BC = \sqrt{13}$ 、 $CA = \sqrt{10}$ の三角形ABCの面積を求めると

$$\triangle ABC = \boxed{\text{ケ}} / \boxed{\text{コ}}$$

である。これと(i)の体積Vを用いる。三角錐O-ABCの体積は、 $\triangle ABC$ を底面、OHを高さとして $V = (1/3) \times \triangle ABC \times OH$ とも表せるから

$$OH = \boxed{\text{サ}} / \boxed{\text{シ}}$$

である。

(2)(iii)

5点

図のように、頂点Bから辺CAに下ろした垂線の足をE、頂点Cから辺ABに下ろした垂線の足をFとする。(2直線BE、CFは三角形ABCの垂線であり、(1)より点Hで交わる。)

$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ であるから、4点B、C、E、Fは1つの円周上にあり、この円の直径は線分 $\boxed{\text{ス}}$ である。この円に対して、点Aを通る2本の割線A—E—C と A—F—B に方べきの定理を用いると

$$AE \cdot AC = AF \cdot AB = \boxed{\text{セ}}$$

が成り立つ。ここで $AB = \sqrt{5}$ 、 $CA = \sqrt{10}$ であるから

$$AF = \sqrt{\boxed{\text{ソ}} / \boxed{\text{タ}}}$$

であり、また

$$AE : EC = 1 : \boxed{\text{チ}}$$

である。

〔ス〕の解答群 ① AB ② BC ③ CA ④ AH ⑤ EF

第4問 場合の数と確率 (20点)

ある高校の文化祭の模擬店で、次のようなくじ引きゲーム「あたりチャレンジ」が行われている。

———— ゲームのルール ————

- ・箱の中に、**あたりくじ 2 本**と**はずれくじ 3 本**の合計 5 本が入っている。
 - ・参加者は箱から 1 本ずつくじを引く。**引いたくじは箱に戻さない**。
 - ・**あたりくじ**を引いた時点でゲームは終了する。
 - ・**はずれくじ**を引いたときは続けて引くことができるが、引けるのは**最大 3 回**までとする。3 回引いてもあたりくじが出なければ、その時点でゲームは終了する。
-

以下、箱の中の 5 本のくじはどれも同じ確からしさで引かれるものとする。

(1)(i)

2点

はじめに、あたりくじを引くまでの確率を考える。

1 回目にあたりくじを引く確率は / である。

(1)(ii)

3点

次に、2 回目に初めてあたりくじを引く（1 回目ははずれ、2 回目にあたり）確率を考える。

太郎：引いたくじを戻さないから、2 回目にあたる確率は 1 回目と同じ $2/5$ ではないね。

花子：そうだね。1 回目にはずれると、箱には残り 4 本のうちあたりが 2 本。だから「1 回目にはずれた」という条件のもとで 2 回目にあたる確率を掛ければいいよ。

この方針にしたがうと、2 回目に初めてあたりくじを引く確率は / である。

(1)(iii)

3点

3 回引いてもあたりくじが 1 本も出ない（3 回ともはずれ）確率は / である。

これを利用すると、余事象を考えて、3 回以内に少なくとも 1 回あたりくじを引く確率は / である。

(2)

6点

このゲームでは、あたりくじを引くまでに引いた回数に応じて、次のように賞金が支払われる。また、1回参加するには参加料 350 円を支払う。

1 回目であたり … 500 円 / 2 回目であたり … 300 円
3 回目であたり … 100 円 / 3 回ともはずれ … 0 円

1 回のゲームでもらえる賞金を X 円とする。

$X=100$ となる確率は / である。

また、 X の期待値は $E =$ 円である。

この模擬店では、参加料 350 円に対して『賞金の期待値が参加料以上（参加者が平均的に損をしない）ならば参加は妥当である』と考える。この基準によると、このゲームに 1 回参加することは 。

〔チ〕の解答群 ① 妥当である ② 妥当でない

(3)

6点

次に、1 回目であたったときの賞金を a 円（ a は正の数）に変更することを考える。2 回目であたり 300 円、3 回目であたり 100 円、3 回ともはずれ 0 円、参加料 350 円は変えないものとする。

このとき、賞金の期待値は

$E = (2a +$) / 5 (円)

と表される。

参加が妥当（賞金の期待値が参加料 350 円以上）となるのは、 $a \geq$ のときである。

解答・解説

第1問 数と式、図形と計量

〔1〕(1) 答：ア=4 イ=2 (5点)

$a=1$ のとき左辺を b で整理すると $(2x^2+x-1)b + (8x^2-4x)$ 。共通因数でくくると $(2x-1)\{(b+4)x+b\}$ 。よって $2x-1=0$ 、すなわち $x=1/2$ は b の値によらず①の解。

〔1〕(2)(i) 答：ウ=3 エ=1 オ=3 カ=2 (4点)

$b=2$ のとき①は $(3a+9)x^2 + (a-3)x - 2 = 0$ 。因数分解して $(3x+1)\{(a+3)x-2\}=0$ となる。

〔1〕(2)(ii) 答：キ=1 ク=3 ケ=6 コ=4 (3点)

(2)(i) より① ($b=2$) の解は $x=-1/3$ と $x=2/(a+3)$ 。 $a=2\sqrt{2}$ を代入すると $2/(2\sqrt{2}+3)=2(2\sqrt{2}-3)/\{(2\sqrt{2})^2-9\}=2(2\sqrt{2}-3)/(-1)=6-4\sqrt{2}$ 。よって $x=-1/3, 6-4\sqrt{2}$ 。

〔1〕(2)(iii) 答：サ=① (3点)

$a=-3$ のとき①は $-6x-2=0$ (1次方程式) となり、解は $x=-1/3$ だけ (十分)。しかし解が $x=-1/3$ だけになるのは $a=-3$ のほかに $a=-9$ (重解 $x=-1/3$) でも起こるため、 $a=-3$ は必要ではない。よって「十分条件であるが、必要条件ではない」(①)。

〔2〕(1) 答：シ=1 ス=2 セ=6 ソ=0 タ=7 チ=3 ツ=3 (6点)

余弦定理より $\cos \angle ACB = (CA^2 + CB^2 - AB^2)/(2 \cdot CA \cdot CB) = (25 + 64 - 49)/(2 \cdot 5 \cdot 8) = 40/80 = 1/2$ 。 $0^\circ < \angle ACB < 180^\circ$ より $\angle ACB = 60^\circ$ 。このとき $\sin \angle ACB = \sqrt{3}/2$ だから、正弦定理 $AB/\sin \angle ACB = 2R$ より $R = AB/(2\sin \angle ACB) = 7/(2 \cdot \sqrt{3}/2) = 7/\sqrt{3} = 7\sqrt{3}/3$ 。

〔2〕(2) 答：テ=1 ト=2 ナ=5 (4点)

四角形 ACBD は円 O に内接するから、向かい合う角の和は 180° で $\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。よって $\cos \angle ADB = -1/2$ 。 $\triangle ABD$ で余弦定理 $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB$ より、 $49 = 9 + BD^2 - 2 \cdot 3 \cdot BD \cdot (-1/2) = 9 + BD^2 + 3BD$ 。整理して $BD^2 + 3BD - 40 = 0$ 、 $(BD-5)(BD+8) = 0$ 。 $BD > 0$ より $BD = 5$ 。

〔2〕(3) 答：ニ=5 ノ=5 ネ=3 ノ=4 ハ=① (5点)

四角形 ACBD は対角線 AB によって $\triangle ACB$ と $\triangle ABD$ に分かれる。 $\triangle ACB = (1/2) \cdot CA \cdot CB \cdot \sin \angle ACB = (1/2) \cdot 5 \cdot 8 \cdot (\sqrt{3}/2) = 10\sqrt{3}$ 。 $\triangle ABD = (1/2) \cdot AD \cdot BD \cdot \sin \angle ADB = (1/2) \cdot 3 \cdot 5 \cdot (\sqrt{3}/2) = 15\sqrt{3}/4$ 。よって四角形 ACBD $= 10\sqrt{3} + 15\sqrt{3}/4 = 40\sqrt{3}/4 + 15\sqrt{3}/4 = 55\sqrt{3}/4$ 。次に、4点 A, B, C, D はすべて円 O の周上にあるから、 $\triangle ABD$ の外接円は円 O そのものである。ゆえに $R' = R$ となり、正しいのは ① ($R' = R$)。実際 $R' = AB/(2\sin \angle ADB) = 7/(2 \cdot \sqrt{3}/2) = 7/\sqrt{3} = R$ 。

第2問 2次関数, データの分析

〔1〕(1) 答：ア=2 イ=3 ウ=1 エ=2 オ=2 カ=1 (6点)

仮定2より頂点は(2, 3)だから、頂点の座標を用いて $y = a(x - 2)^2 + 3$ とおける。仮定1より点(0, 1)を通るので $4a + 3 = 1$ 、よって $a = -1/2$ (ウ=1, エ=2)。 $a < 0$ なので上に凸。展開して整理すると $y = -1/2 x^2 + 2x + 1$ となり、**オ = 2、カ = 1**。(最高点の高さは頂点の y 座標だから 3 m。)

〔1〕(2) 答：キ=1 ク=1 ケ=4 コ=3 サ=2 (5点)

平行移動では放物線の形 (x^2 の係数 $-1/2$) は変わらない。通る2点(1, 2), (5, 2)は y 座標が等しいから、頂点の x 座標はこの2点の中点で $x = 3$ 。花子さんの式を $y = -1/2(x - 3)^2 + k$ とおき、点(1, 2)を代入すると $-2 + k = 2$, $k = 4$ 。よって頂点は(3, 4)で、太郎さんの頂点(2, 3)から **x 軸方向に 1、 y 軸方向に 1** 平行移動したもの。最高点の高さは **4 m**。

太郎さんの式 $y = -1/2 x^2 + 2x + 1$ と花子さんの式 $y = -1/2 x^2 + 3x - 1/2$ の差は $(2x + 1) - (3x - 1/2) = -x + 3/2$ 。 x^2 の係数が等しいので差は1次式となり、これが0になる **$x = 3/2$** で2つのボールの高さがちょうど等しくなる(交わるのは1か所)。

〔1〕(3) 答：シ=1 ス=3 セ=② (4点)

太郎さんのボールの高さが $5/2$ m 以上 $\Leftrightarrow -1/2 x^2 + 2x + 1 \geq 5/2$ 。両辺を -2 倍して整理すると $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, $(x - 1)(x - 3) \leq 0$ より **$1 \leq x \leq 3$** 。

花子さんと同様に $-1/2(x - 3)^2 + 4 \geq 5/2$ を解くと $(x - 3)^2 \leq 3$ 、すなわち $3 - \sqrt{3} \leq x \leq 3 + \sqrt{3}$ となり、範囲の幅は $2\sqrt{3} \div 3.46$ 。太郎さんの範囲の幅2より長い。

2つの放物線は同じ形 (x^2 の係数が等しい) なので、最高点がより高い花子さんのボールの方が、決めた高さ以上にとどまる水平距離の幅が広がる。よって「**花子さんのボールの方が長い**」(②)。

〔2〕(1) 答：ソ=1 タ=5 チ=① (4点)

y を小さい順に並べると 23.0, 26.5, 27.0, 27.5, 28.0, 28.0, 28.5, 28.5, 29.0, 29.5。中央値で下組(小さい方5個)と上組(大きい方5個)に分けると、第1四分位数は下組の中央値27.0°C、第3四分位数は上組の中央値28.5°C。よって四分位範囲は $28.5 - 27.0 = 1.5^\circ\text{C}$ 。

(a) 第1四分位数 $-1.5 \times 1.5 = 27.0 - 2.25 = 24.75^\circ\text{C}$ 。札幌の23.0°Cはこれより小さいので外れ値。**正**。

(b) 28.5°Cを「超える」(28.5は含まない)都市は29.0°Cと29.5°Cの2つだけ。「3つ以上」は**誤**。

したがって組合せは① ((a)正 (b)誤)。

〔2〕(2) 答：ツ=⑧ テ=① (4点)

(i) 相関係数 $r = s_{xy} \div (s_x \times s_y) = 5.2 \div (\sqrt{10.7} \times \sqrt{3.0}) = 5.2 \div 5.67 \div 0.92$ 。最も近いのは⑧の0.90。

(ii) (a) 散布図は右上がりなので $r > 0$ なので、正の相関=高い都市ほど高い傾向。**正**。(b) 相関関係があっても因果関係があるとは限らない(両方とも緯度など別の要因で決まる)。**誤**。よって①。

〔2〕(3) 答：ト=① ナ=⑩ (3点)

(i) $d = y - x$ の分散は $s_d^2 = s_y^2 + s_x^2 - 2s_{xy}$ (差なので共分散の項は $-2s_{xy}$)。よって①。

(ii) $s_{xy} = 5.2 > 0$ だから $2s_{xy} > 0$ 。 $s_d^2 = (s_x^2 + s_y^2) - 2s_{xy}$ は $s_x^2 + s_y^2$ より小さい。(実際 $10.7 + 3.0 - 2 \times 5.2 = 3.3 < 13.7$)。よって<。

(2) (4) 答：ニ=① ヌ=① ネ=① (4点)

(i) 仮説検定では「差がない・偏りがない」とする帰無仮説を立てて、それが否定できるかを調べる。ここでは「晴れの割合は0.5である ($p=0.5$)」が帰無仮説。①。

(ii) 表2より、帰無仮説 ($p=0.5$) のもとで晴れが15日以上となる確率は 0.021。これは0.05より小さい。(となりの14日以上)の $0.058 > 0.05$ と取り違えないこと)

(iii) $0.021 < 0.05$ なので帰無仮説は棄却される。よって「晴れの日の割合は0.5より大きい」=主張は正しいといえる。①。

第3問 図形の性質

(1) 答：ア=① イ=④ ウ=③ エ=② (7点)

$OA \perp OB$ 、 $OA \perp OC$ より、 OA は平面OBC上の交わる2直線OB、OCに垂直だから、直線OAは平面OBC (①) に垂直。ゆえに $OA \perp BC$ 。また $OH \perp$ 平面ABCより $OH \perp BC$ 。BCは交わる2直線OA、OHの両方に垂直だから、BCは平面OAH (④) に垂直で、その平面上のAHについて $BC \perp AH$ 。同様に $AB \perp CH$ も成り立つので、Hは各頂点から対辺への垂線の交点=垂心 (③)。

(c) $OA \perp OB$ 、 $OA \perp OC$ より、直線OAは平面OBC上の交わる2直線に垂直だから $OA \perp$ 平面OBC=正。

(a) 平面OABは、平面OBCに垂直な直線OAを含む。1つの平面がもう1つの平面に垂直な直線を含めば2平面は垂直だから、平面OAB $\perp$ 平面OBC=正。

(b) 平面ABCに垂直な直線はOH (の向き) だが、OHは平面OAB上にない (Hは平面OAB上にない)。実際、Oを原点、A、B、Cを各座標軸上にとると平面OABの法線は(0,0,1)、平面ABCの法線は(6,3,2)で内積は $2 \neq 0$ だから直交せず、2平面は垂直でない=誤。

よって(a)正・(b)誤・(c)正の②。

(2)(i) 答：オ=5 カ=1 キ=3 ク=1 (4点)

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ 、 $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ 。 OA 、 OB 、 OC が互いに垂直なので、 $\triangle OAB$ を底面 (面積 $1/2 \cdot 1 \cdot 2 = 1$)、高さ $OC = 3$ とみて $V = (1/3) \cdot 1 \cdot 3 = 1$ 。

(2)(ii) 答：ケ=7 コ=2 サ=6 シ=7 (4点)

$\cos A = (AB^2 + CA^2 - BC^2) / (2 \cdot AB \cdot CA) = (5 + 10 - 13) / (2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}) = 2 / (2 \cdot 5 \sqrt{2}) = 1 / (5 \sqrt{2})$ 。 $\sin A = \sqrt{1 - 1/50} = 7 / (5 \sqrt{2})$ 。
 $\triangle ABC = (1/2) \cdot AB \cdot CA \cdot \sin A = (1/2) \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot 7 / (5 \sqrt{2}) = (1/2) \cdot 5 \sqrt{2} \cdot 7 / (5 \sqrt{2}) = 7/2$ 。($\triangle OAB = 1$ 、 $\triangle OBC = 3$ 、 $\triangle OCA = 3/2$ から $\triangle ABC^2 = 1^2 + 3^2 + (3/2)^2 = 49/4$ としてもよい。)

$V = (1/3) \times \triangle ABC \times OH$ より $1 = (1/3) \cdot (7/2) \cdot OH$ 。よって $OH = 6/7$ 。

(2)(iii) 答：ス=① セ=1 ソ=5 タ=5 チ=9 (5点)

$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ より、E、Fは線分BCを直径とする円周上にある (BCを見込む角が直角)。よって4点B、C、E、Fは共円で、直径は線分BC (①)。

点Aからこの円への方べきの定理より $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ 。 $AF = AC \cdot \cos A$ 、 $AE = AB \cdot \cos A$ 、 $\cos A = 1 / (5 \sqrt{2})$ を使うと $AF \cdot AB = (AC \cdot \cos A) \cdot AB$ 、 $AE \cdot AC = (AB \cdot \cos A) \cdot AC$ とともに $AB \cdot AC \cdot \cos A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot 1 / (5 \sqrt{2}) = 5 \sqrt{2} / (5 \sqrt{2}) = 1$ 。

$AF \cdot AB = 1$ 、 $AB = \sqrt{5}$ より $AF = 1 / \sqrt{5} = \sqrt{5} / 5$ 。同様に $AE = 1 / \sqrt{10} = \sqrt{10} / 10$ で、 $EC = CA - AE = \sqrt{10} - \sqrt{10} / 10 = 9 \sqrt{10} / 10$ だから $AE : EC = 1 : 9$ 。

第4問 場合の数と確率

(1)(i) 答：ア=2 イ=5 (2点)

5本のうちあたりは2本だから、1回目にあたりくじを引く確率は $\frac{2}{5}$ 。

(1)(ii) 答：ウ=3 エ=1 オ=0 (3点)

1回目にはずれる確率は $\frac{3}{5}$ 。そのとき箱には4本（あたり2・はずれ2）が残るので、2回目にあたる条件付き確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。よって求める確率は $(\frac{3}{5}) \times (\frac{2}{4}) = \frac{3}{10}$ 。

毎回あたりが $\frac{2}{5}$ と考えて $(\frac{3}{5}) \times (\frac{2}{5}) = \frac{6}{25}$ とするのは誤り。くじを戻さないため、2回目の確率は1回目は何を引いたかで変わる（独立ではない）。

(1)(iii) 答：カ=1 キ=1 ク=0 ケ=9 コ=1 サ=0 (3点)

3回ともはずれるのは、はずれ3本を3回で続けて引く場合で、その確率は $(\frac{3}{5}) \times (\frac{2}{4}) \times (\frac{1}{3}) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ 。

「3回以内に少なくとも1回あたり」はその余事象だから、 $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ 。

(1回目・2回目・3回目であたる確率の和 $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$ とも一致する。)

(2) 答：シ=1 ス=5 セ=3 ソ=1 タ=0 チ=① (6点)

$X=100$ となるのは3回目で初めてあたる場合で、その確率は $(\frac{3}{5}) \times (\frac{2}{4}) \times (\frac{2}{3}) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ 。

賞金 X の分布は、 $X=500$ が確率 $\frac{2}{5}$ 、 $X=300$ が $\frac{3}{10}$ 、 $X=100$ が $\frac{1}{5}$ 、 $X=0$ が $\frac{1}{10}$ 。よって期待値は

$$E = 500 \times (\frac{2}{5}) + 300 \times (\frac{3}{10}) + 100 \times (\frac{1}{5}) + 0 \times (\frac{1}{10}) = 200 + 90 + 20 = 310 \text{ (円)}。$$

$E=310 \text{ 円} < \text{参加料 } 350 \text{ 円}$ なので、平均的には参加料の方が高く、参加者は損をする。したがって参加は妥当でない (①)。

(3) 答：ツ=5 テ=5 ト=0 ナ=6 ニ=0 ヌ=0 (6点)

期待値は $E = a \times (\frac{2}{5}) + 300 \times (\frac{3}{10}) + 100 \times (\frac{1}{5}) = (\frac{2}{5})a + 90 + 20 = (\frac{2}{5})a + 110$ 。分母を5にそろえて $E = (2a + 550)/5$ (円)。

($a=500$ とすると $(1000 + 550)/5 = 310$ となり (2) の結果と一致する。)

参加が妥当となる条件 $E \geq 350$ は $(2a + 550)/5 \geq 350$ 、すなわち $2a + 550 \geq 1750$ 、 $2a \geq 1200$ 、よって $a \geq 600$ 。

したがって、1回目の賞金を600円以上にすれば、このゲームへの参加は妥当になる。